Инженерный вестник Дона, №9 (2025)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2025/10332

Статистический анализ коэффициента ортотропии многослойной оболочки

А.Ш. Кусяков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация: Представлены результаты статистического анализа коэффициента ортотропии многослойной цилиндрической оболочки, находящейся под действием сжимающих нагрузок. Коэффициент ортотропии определяется как отношение критической нагрузки при несимметричном выпучивании оболочки к критической нагрузке при осесимметричном выпучивании оболочки. Предполагается, что полотно конструкции образовано укладкой продольных, кольцевых и двойных спиральных слоев. Входными величинами служат упругие характеристики монослоев, в предположении, что эти характеристики являются случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения. Выходной величиной служит величина коэффициента ортотропии. Все вычисления производились в системе компьютерной алгебры MAXIMA. Исследованы две наиболее распространенные модели оболочек: равножесткие и квазиизотропные. Установлено, в частности, что для оболочек с квазиизотропной структурой происходит «детерминация» коэффициента ортотропии.
Ключевые слова: статистическое моделирование, монослой, многослойная оболочка, композитный материал, упругие характеристики, устойчивость, выпучивание, критическая нагрузка, коэффициент ортотропии, MAXIMA, метод Монте-Карло.

Введение

Круговая цилиндрическая оболочка – это один из наиболее распространенных силовых элементов ракетных конструкций. Значительный интерес представляет случай, когда оболочка находится под действием осевых сжимающих нагрузок. Выпучивание конструкции при данном типе нагрузок может происходить как по осесимметричной, так и по несимметричной формам. Известно, что для оболочек, изготовленных из изотропного материала, потеря устойчивости при осесимметричном выпучивании происходит при том же значении критической нагрузки, что и при несимметричном выпучивании [1-3]. В отличие от изотропных конструкций, критические нагрузки для ортотропных оболочек при осесимметричном и несимметричном выпучиваниях могут существенно различаться. Характеристикой степени различия критических нагрузок при осесимметричной и несимметричной формах потери устойчивости служит коэффициент ортотропии.

При выполнении определенных условий многослойные оболочки из композитного материала можно рассматривать как однородные ортотропные конструкции с приведенными упругими характеристиками. Главным преимуществом композитных конструкций по сравнению с изотропными конструкциями является возможность целенаправленного управления характеристиками композитной конструкции с целью получения оптимального проекта.

Основным структурным элементом многослойной конструкции является монослой, представляющий собой совокупность волокон, соединенных матрицей. Укладывая монослои под различными углами к образующей цилиндрической оболочке, можно получать конструкции с различными механическими характеристиками. Отметим, что в настоящее время конструкции из композитных материалов широко используются в самых различных областях техники [4-6]. Методы расчета и проектирования композитных конструкций достаточно полно представлены, например, в работах [7-9]. Алгоритмы статистического моделирования тонкостенных конструкций из композитного материала приведены в монографии [10]. Обзор механических характеристик композиционных материалов, применяемых в изделиях авиационной и ракетно-космической отрасли, представлен в статье [11].

Исходные механические характеристики материала монослоев являются случайными величинами. Следовательно, выходные величины (напряжения, критические нагрузки и т.д.) многослойной оболочки также являются случайными величинами. Цель работы – исследование влияния разброса механических характеристик материала монослоев на величину коэффициента ортотропии. Рассмотрены два типа многослойных оболочек, получивших значительное распространение при проектировании силовых элементов ракетных конструкций:

- равножесткие конструкции;
- квазиизотропные конструкции.

Постановка задачи

Многослойная цилиндрическая оболочка находится под действием осевых сжимающих нагрузок, равномерно распределенных по торцам конструкции (рис. 1).

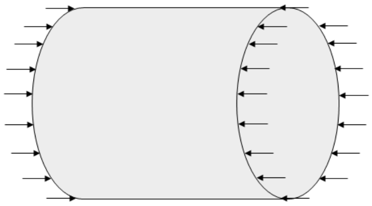

Рис. 1. – Цилиндрическая оболочка под действием сжимающих нагрузок

Полотно оболочки в общем случае может быть образовано укладкой продольных, кольцевых и двойных спиральных монослоев. Предполагается, что слои упакованы симметрично относительно срединной поверхности оболочки, что позволяет рассматривать ее как однородную ортотропную оболочку с приведенными компонентами матрицы жесткости.

Определим коэффициент ортотропии цилиндрической оболочки следующим образом:

$$k_{ort} = \frac{q_{ns}}{q_{os}}.$$

Здесь q_{os}, q_{ns} – критические нагрузки для осесимметричной и несимметричной форм потери устойчивости соответственно.

Требуется исследовать влияние разброса упругих характеристик материала монослоев на величину коэффициента ортотропии. Предполагается, что упругие характеристики являются случайными величинами, которые подчиняются нормальному закону распределения.

Входными величинами являются математические ожидания и стандартные отклонения упругих характеристик материала монослоев, а выходными величинами – математическое ожидание, стандартное отклонение, а также коэффициенты асимметрии и эксцесса коэффициента ортотропии.

Расчетные зависимости

Введем следующие обозначения:

E_1, E_2 – модули Юнга монослоя вдоль и поперек волокон соответственно;

ν_{12}, G_{12} – коэффициент Пуассона и модуль сдвига монослоя соответственно;

θ_0, θ_{90} – относительные толщины продольных и кольцевых слоев соответственно;

θ_{45} – относительная толщина двойных спиральных слоев, армированных под углами $\pm 45°$ по направлению к образующим цилиндрической оболочки.

Компоненты матрицы жесткости в главных осях монослоя связаны с упругими характеристиками следующими зависимостями:

$$b_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}},\ b_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}},\ b_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1-\nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}},\ b_G = G_{12}.$$

В системе координат *Oxy* цилиндрической оболочки приведенные компоненты матрицы жесткости имеют вид:

$$A_{xx} = b_{11}\theta_0 + \frac{b_{11} + b_{22} + 2(b_{12} + 2b_G)}{4}\theta_{45} + b_{22}\theta_{90},$$

$$A_{yy} = b_{22}\theta_0 + \frac{b_{11} + b_{22} + 2(b_{12} + 2b_G)}{4}\theta_{45} + b_{11}\theta_{90},$$

$$A_{xy} = b_{12} + \frac{b_{11} + b_{22} - 2(b_{12} + 2b_G)}{4}\theta_{45},$$

$$A_G = b_G + \frac{b_{11} + b_{22} - 2(b_{12} + 2b_G)}{4}\theta_{45}.$$

Здесь *x, y* – координаты в продольном и окружном направлениях цилиндрической оболочки соответственно.

Если структурные параметры многослойной оболочки удовлетворяют условиям $\theta_0 = \theta_{90} = 0{,}5$, тогда жесткости в продольном и окружном направлениях совпадают

$$A_{xx} = A_{yy}. \tag{1}$$

Такие оболочки называются равножесткими.

Если структурные параметры многослойной оболочки удовлетворяет условиям $\theta_0 = \theta_{90} = 0{,}25$, $\theta_{45} = 1 - \theta_0 - \theta_{90} = 0{,}5$, тогда выполняются равенства

$$A_{xx} = A_{yy} = A_{xy} + 2A_G. \tag{2}$$

Такие оболочки называются квазиизотропными.

С учетом введенных обозначений коэффициент ортотропии можно представить в виде [12]:

$$k_{ort} = \sqrt{\frac{A_G(\sqrt{A_{xx}A_{yy}} + A_{xy} + 2A_G)}{A_G\sqrt{A_{xx}A_{yy}} + \dfrac{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2}{2} - A_{xy}A_G}}. \tag{3}$$

Формулу (4) можно значительно упростить. Действительно, представим знаменатель подкоренного выражения в виде:

$$A_G\sqrt{A_{xx}A_{yy}} + \frac{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2}{2} - A_{xy}A_G = \frac{\sqrt{A_{xx}A_{yy}} - A_{xy}}{2}\cdot(\sqrt{A_{xx}A_{yy}} + A_{xy} + 2A_G).$$

Подставив это выражение в знаменатель подкоренного выражения формулы (4), после сокращения на общий множитель числителя и знаменателя, получим

$$k_{ort} = \sqrt{\frac{2A_G}{\sqrt{A_{xx}A_{yy}} - A_{xy}}}. \qquad (4)$$

Статистический анализ

Исследуем влияние разброса упругих характеристик материла монослоев на величину коэффициента ортотропии для многослойной цилиндрической оболочки. Исходные данные для моделирования коэффициента ортотропии:

$M(E_1)$=140 ГПа; $M(E_2)$=7 ГПа; $M(G_{12})$=2,75 ГПа; $M(\nu_{12})$=0,24;

$\sigma(E_1)$=7 ГПа; $\sigma(E_2)$=0,35 ГПа; $\sigma(G_{12})$=0,14 ГПа; $\sigma(\nu_{12})$=0,012.

Здесь $M(X)$ и $\sigma(X)$ – математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X соответственно.

Для решения задачи воспользуемся методом Монте-Карло [13]. Реализация метода осуществлялась в среде системы компьютерной алгебры MAXIMA [14]. Количество испытаний принималось равным N=1000.

На рис.2 приведена гистограмма распределения относительной частоты коэффициента ортотропии для равножесткой оболочки.

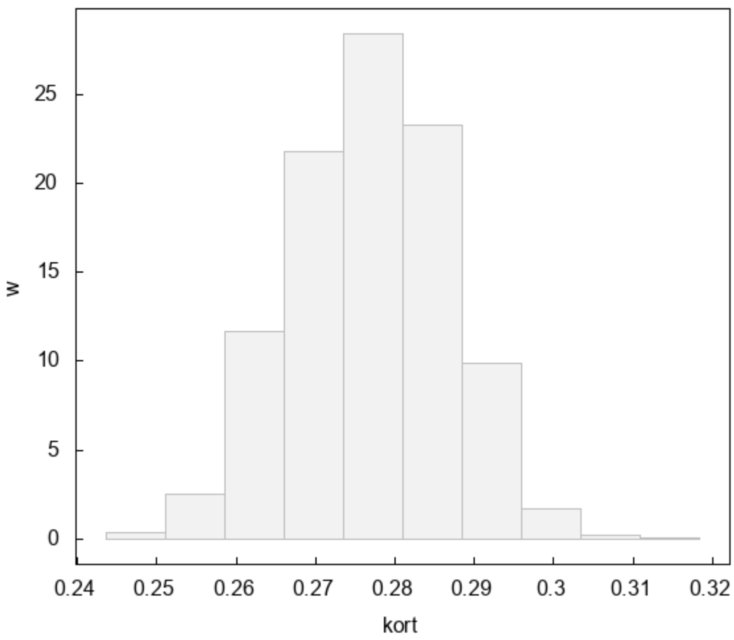

Рис. 2. – Гистограмма для равножесткой оболочки

Результаты численных расчетов для равножесткой конструкции:

среднее значение коэффициента ортотропии – 0,277;

стандартное отклонение – 0,0097;

коэффициент асимметрии – 0,033;

коэффициент эксцесса – (-0,152).

Таким образом, с достаточной для инженерных расчетов точностью можно считать, что для равножесткой оболочки распределение коэффициента ортотропии подчиняется нормальному закону.

На рис.3 представлена «гистограмма» распределения относительных частот коэффициента ортотропии для квазиизотропной оболочки.

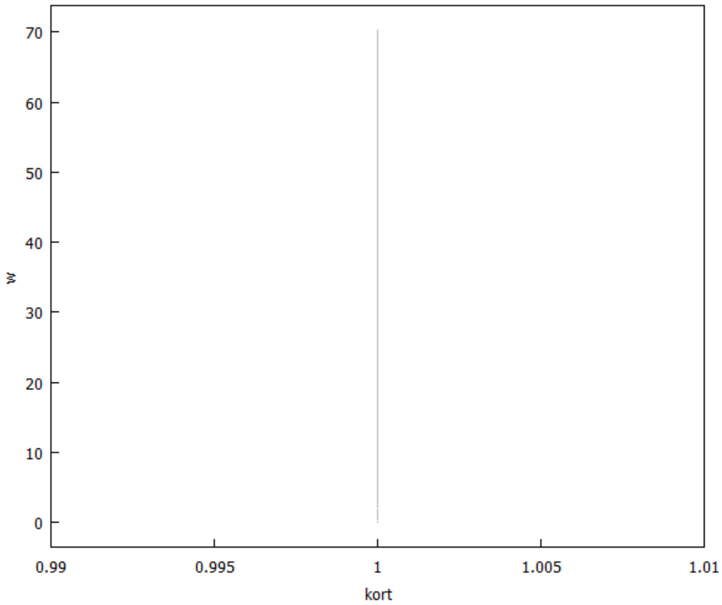

Рис. 3. – «Гистограмма» для квазиизотропной оболочки

«Среднее значение» коэффициента ортотропии равно 1. Вычисление остальных статистических характеристик не имеет смысла, так как коэффициент ортотропии в данном случае не является случайной величиной. Другими словами, в данном случае происходит «детерминация» коэффициента ортотропии. Этот «странный» результат имеет простое объяснение. Действительно, подставив равенства (2) в выражение для коэффициента ортотропии (4), получим:

$$k_{ort} = \sqrt{\frac{2A_G}{\sqrt{A_{xx}A_{yy}} - A_{xy}}} = \sqrt{\frac{2A_G}{A_{xx} - A_{xy}}} = \sqrt{\frac{2A_G}{A_{xy} + 2A_G - A_{xy}}} = \sqrt{\frac{2A_G}{2A_G}} = 1.$$

Таким образом, величина коэффициента ортотропии не зависит от упругих характеристик материала монослоев.

В случае равножесткой конструкции имеем:

$$A_{xx} = A_{yy} = \frac{b_{11} + b_{22}}{2},\ A_{xy} = b_{12},\ A_G = b_G. \tag{5}$$

Подставив равенства (5) в выражение для коэффициента ортотропии (4), получим:

$$k_{ort} = \sqrt{\frac{2A_G}{\sqrt{A_{xx}A_{yy}} - A_{xy}}} = \sqrt{\frac{2b_G}{\frac{b_{11} + b_{22}}{2} - b_{12}}}. \tag{6}$$

Очевидно, что «детерминация» коэффициента ортотропии (6) возможна только при выполнении условия:

$$\frac{b_{11} + b_{22}}{2} = b_{12} + 2b_G. \tag{7}$$

В рассмотренных примерах характеристики монослоев удовлетворяют условию:

$$\frac{b_{11} + b_{22}}{2} > b_{12} + 2b_G.$$

Поэтому в случае равножесткой оболочки эффект «детерминации» отсутствует.

Таким образом, при разработке алгоритмов статистического анализа композитных конструкций следует обязательно учитывать вырожденные случаи, при которых происходит «детерминация» выходных характеристик конструкции.

Литература

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 311 с.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

3. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.

4. Gay D. Composite Materials: Design and Applications. 4nd Edition. CRC Press Content, 2022. 640 p.

5. Маилян Д. Р., Польский П.П. Прочность и деформативность усиленных композитными материалами балок при различных варьируемых факторах // Инженерный вестник Дона, 2013. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1676.

6. Польской П. П., Маилян Д. Р. Композитные материалы – как основа эффективности в строительстве и реконструкции зданий и сооружений // Инженерный вестник Дона, 2012. № 4-2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1307.

7. Gibson R.F. Principles of Composite Material Mechanics. 3rd Edition. CRC Press Content, 2011, 683 p.

8. Kaw A.K. Mechanics of Composite Materials. 2nd Edition. CRC Press Content, 2005, 490 p.

9. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

10. Кусяков А. Ш. Статистическое моделирование тонкостенных конструкций в системе MAXIMA / Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2024. 200 с.

11. Зорин В. А. Опыт применения композиционных материалов в изделиях авиационной и ракетно-космической техники (Обзор) // Конструкции из композиционных материалов. 2011. № 4. С. 44-59.

12. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978. 240 с.

13. Соболь И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.

14. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. 113 с.

References

1. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost′ uprugikh system [Fundamentals of calculation of stability of elastic systems]. M.: Mashinostroyeniye, 1978. 311 p.

2. Vol′mir A.S. Ustoychivost′ deformiruyemykh system [Stability of deformable systems]. M.: Nauka, 1967. 984 p.

3. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. Ustoychivost′ obolochek [Stability of shells]. M.: Nauka, 1978. 360 p.

4. Gay D. Composite Materials: Design and Applications. 4nd Edition. CRC Press Content, 2022. 640 p.

5. Mailyan D. R., Pol′skiy P.P. Inzhenernyy vestnik Dona, 2013. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1676.

6. Pol′skoy P. P., Mailyan D. R. Inzhenernyy vestnik Dona, 2012. № 4-2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1307.

7. Gibson R.F. Principles of Composite Material Mechanics. 3rd Edition. CRC Press Content, 2011. 683 p.

8. Kaw A.K. Mechanics of Composite Materials. 2nd Edition. CRC Press Content, 2005. 490 p.

9. Vasil′yev V.V. Mekhanika konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite structures]. M.: Mashinostroyeniye, 1988. 272 p.

10. Kusyakov A. SH. Statisticheskoye modelirovaniye tonkostennykh konstruktsiy v sisteme MAXIMA [Statistical modeling of thin-walled structures in the MAXIMA system]. Perm′: Permskiy gosudarstvennyy natsional′nyy issledovatel′skiy universitet, 2024. 200 p.

11. Zorin V. A. Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov. 2011. № 4. PP. 44-59.

12. Teters G.A., Rikards R.B., Narusberg B.JI. Optimizatsiya obolochek iz sloistykh kompozitov [Optimization of laminated composite shells]. Riga: Zinatne, 1978. 240 p.

13. Sobol′ I. M. Metod Monte-Karlo [Monte Carlo method]. M.: Nauka, 1978. 64 p.

14. Il′ina V.A., Silayev P.K. Sistema analiticheskikh vychisleniy Maxima dlya fizikov-teoretikov [Maxima analytical computing system for theoretical physicists]. M.:MGU im. M. V. Lomonosova, 2007. 113 p.

Дата поступления: 17.06.2025

Дата публикации: 25.08.2025